Lycées :F. Bourguiba - Khéfacha Monastir	**Devoir de Synthèse N°1**	prof : Karim - Mourad
Le : 03/12/2019	Bac Math 1	Durée : 3 H

Exercice 1(5points)

I) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): -z^2+iz+1=0$ et donner les solutions sous forme exponentielle

II) Soit R=$(O,\vec{U},\vec{V})$ un RON direct du plan .Dans l'annexe ci jointe on donne $M(z)$; $A(1)$ et $B(b)$ trois points du cercle $C_{(O,1)}$ tels que $(\widehat{\vec{U},\overrightarrow{OM}}) \equiv \theta[2\pi]$ et $(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OB}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ avec $\theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

1) Donner la forme exponentielle de z puis montrer que $b=iz$

2) Soient les points $C(-z^2)$ et $A' = S_{(OM)}(A)$. Montrer que $(\widehat{\vec{U},\overrightarrow{OA'}}) \equiv 2\theta[2\pi]$ puis déduire que $O = C * A'$

3) On note $H(1+iz-z^2)$ et $N(1+iz)$. a) Montrer que $OANB$ est un parallélogramme

b) Montrer que $\frac{1+iz}{1-iz} = \frac{\cos(\theta)}{1+\sin(\theta)}\, i$

c) Montrer que $\frac{aff(\overrightarrow{AH})}{aff(\overrightarrow{CB})} = \frac{aff(\overrightarrow{CH})}{aff(\overrightarrow{BA})} = \frac{1+iz}{1-iz}$

d) En déduire que H est l'orthocentre du triangle ABC puis construit le point H sur l'annexe

4) a) Déterminer $\theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ pour que le point O soit l'orthocentre du triangle ABC

b) En déduire que pour la valeur de θ trouvée A ; B et C sont les points images des racines cubiques de l'unité

Exercice 2(5points)

Soit la fonction f définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ et C_f sa courbe dans un RON $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) a) Montrer que $f'(x) = \frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^3}$ pour tout x de $]-1,1[$. Dresser le tableau de variation de f

b) Montrer que le point $A(0,1)$ est un centre de symétrie de C_f

c) Ecrire une équation de la tangente T à C_f au point A puis etudier la position de T et C_f

d) Tracer T et C_f dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $]-1,1[$ sur $\mathbb{R}$

b) Tracer $C_{f^{-1}}$ dans le même repère

c) Montrer que $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+1}}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

3) Soit $g(x) = \sqrt{(x-1)^2+1}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

On considère la suite (U_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $U_n = n^2\left[g\left(\frac{1}{n}\right) - g\left(\frac{1}{n+1}\right)\right]$

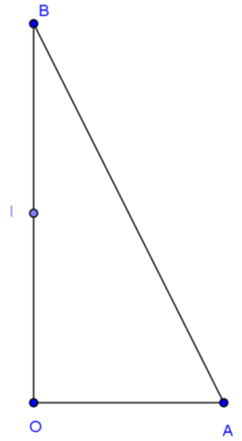
a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$; $f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right) \le g'(x) \le f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ona : $\frac{n}{n+1} f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right) \le U_n \le \frac{n}{n+1} f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$

c) En déduire la limite de la suite (U_n)

Exercice 3(5points)

ABO est un triangle rectangle en O tel que $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$; $OB = 2\,OA$ et $I = O * B$



1) a) Montrer qu' il existe un unique déplacement f tel que $f(O) = I$ et $f(A) = B$

b) Montrer que f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$

2) La droite perpendiculaire à (OB) et passant par I et la droite perpendiculaire à (AB) passant par B se coupent en C

a) Déterminer l'image de la droite (OB) par f puis déduire que $f(B) = C$

b) En déduire que le centre Ω de f est le milieu du segment $[AC]$

3) On pose $R = r_{(O,\ \frac{\pi}{2})}$ et $\Delta =$ méd$_{[AI]}$. Caractériser foR^{-1} et $S_{(OI)}oR$

4) Soit $D = I * C$ .Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g tel que $g(O) = I$ et $g(A) = D$

a) Montrer que g est une symétrie glissante

b) Soit $J = I * O$. Montrer que $goS_{(OA)} = S_J$ puis déduire la forme réduite g

5) Soit $\varphi = g^{-1}\ o\ f$. Déterminer $\varphi(O)$ et $\varphi(I)$ puis caractériser φ

Exercice 4(5points)

Soit f la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\cos(x)}}$

1) a) Montrer que $\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ $f'(x) = \frac{1}{2}(f(x))^3\sin(x)$

b) Montrer que f réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $[1,+\infty[$

c) Etudier la dérivabilité de f^{-1} à droite en 1

c) Montrer que f^{-1}est dérivable en $\sqrt{2}$ et donner $(f^{-1})'(\sqrt{2})$

2) Montrer que f^{-1} est dérivable sur$]1,+\infty[$ et déduire que $\forall\, x \in\,]1,+\infty[$ $(f^{-1})'(x) = \frac{2}{x\sqrt{x^4-1}}$

3) Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(x) = f^{-1}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)$ si $x \in\,]0,+\infty[$ et $g(0) = \frac{\pi}{2}$

a) Montre que g est continue sur $[0,+\infty[$

b) Montrer que g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $x \in\,]0,+\infty[$ $g'(x) = \frac{-1}{(x+1)\sqrt{2x+1}}$

4) a) Soit $x \in\,]0,+\infty[$. Montrer que pour tout $t \in\,]0,x[$, $-1 \leq g'(t) \leq g'(x)$

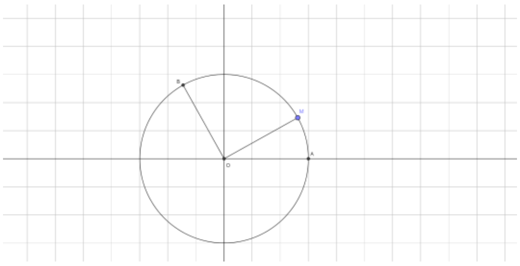
b) En déduire que $\forall x \in\,]0,+\infty[$: $-x \leq g(x) - g(0) \leq \frac{-x}{(x+1)\sqrt{2x+1}}$

c) Montrer alors que g est dérivable à droite en 0

5) Donner une équation de la tangente à C_g au point d'abscisse 0 puis tracer C_g dans un R.O (Figure 2)

<u>Annexe à rendre avec la copie</u> :   Nom et prénom :

<u>Figure 1</u>



<u>Figure 2</u>